

LNf - 62/8

R. Evangelisti - G. Garolla:
CANALE DI $e^+ e^-$ DA 200-700 MeV OTTENIBILE CON IL SINCROTRONE

Nota interna: n° 115
13 Febbraio 1962

INF-62/8

Nota interna: n° 115

13 Febbraio 1962

R. Evangelisti - G. Garolla: CANALE DI e^+e^- DA 200-700 MeV
OTTENIBILE CON IL SINCROTRONE.

Introduzione

In questa nota si spiegano i criteri seguiti nello studio di un canale magnetico adatto al trasporto di un fascio di elettroni o positroni di energia fino a 700 MeV circa con una lunghezza totale della traiettoria di circa 14 metri.

Gli elettroni e i positroni sono ottenuti mediante conversione del fascio γ all'uscita del sincrotrone: la posizione del convertitore è scelta in modo da rendere minimo l'effetto defoccheggiante del campo disperso del magnete del sincrotrone. Dai calcoli eseguiti si è visto che ponendo, lungo la direzione del fascio γ , il convertitore $\gamma \rightarrow e^+$ a 2 metri dal convertitore interno $e^- \rightarrow \gamma$ si ha un effetto defoccheggiante pari ad un angolo di 10^{-3} rad per e^\pm aventi un momento di 250 MeV/c e per un'energia degli elettroni accelerati pari a 1000 MeV.

Calcolo approssimato del rendimento di conversione

Poichè AdA accetta un beam con diametro di ~ 1 cm e divergenza di $\sim 10^{-2}$ rad e poichè progettiamo un canale di trasporto con ingrandimento totale unitario, stimiamo l'ordine di grandezza del rendimento valutando la probabilità che un γ produca un elettrone di energia voluta, entro un cerchio di raggio 0.5 cm, centrato sull'asse del fascio, con divergenza minore di 10^{-2} rad, posto il convertitore a 2 metri dal target interno del sincrotrone.

Innanzitutto bisogna tener conto della divergenza propria del fascio γ ($\bar{\theta} = 3.5$ mrad a mezzo massimo) per cui, supponendo la distribuzione gaussiana, la frazione utile sarà approssimativamente

$$\alpha = 1 - e^{-\frac{\theta_u^2}{\bar{\theta}^2}} = 0.4 \quad (1)$$

ove $\theta_u = 2.5 \times 10^{-3}$ rad è l'angolo utile massimo.

Detta ora $p(E_\gamma, E, 1) dE$ la probabilità che un fotone di energia E_γ produca un elettrone di energia compresa fra E ed $E + dE$ per lunghezza di radiazione del convertitore, detta x la frazione di lunghezza di radiazione che si considera, la probabilità di conversione fra x e $x + dx$ si otterrà dalla

$$d[p(E_\gamma, E, x)] = [1 - p(E_\gamma, E, x)] p(E_\gamma, E, 1) dx \quad (2)$$

da cui integrando si ottiene

$$p(E_\gamma, E, x) = 1 - e^{-x p(E_\gamma, E, 1)} \sim x p(E_\gamma, E, 1) \quad (3)$$

nella ipotesi che risulti $p(E_\gamma, E, 1) \ll \frac{1}{x}$, condizione che è senz'altro verificata per spessori di qualche unità.

Il numero totale di elettroni prodotti entro un cerchio di diametro 1 cm risulta, nell'intervallo ΔE di

energia

$$n \sim \Delta E \times \int_0^{E_{\gamma_0}} p(E_{\gamma}, E, 1) \cdot N(E_{\gamma}) dE_{\gamma} \quad (4)$$

ove $N(E_{\gamma}) \cdot dE_{\gamma}$ è il numero di fotoni di energia compresa fra E_{γ} ed $E_{\gamma} + dE_{\gamma}$.

Dicendo N_{tot} il numero totale di fotoni prodotti nello spettro di bremsstrahlung del sincrotrone ed usando la formula asintotica per la probabilità p

$$p = \frac{\Delta E}{E_{\gamma}} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{E}{E_{\gamma}} + \frac{4}{3} \frac{E^2}{E_{\gamma}^2} \right] \quad (5)$$

si ottiene

$$\eta = \frac{n}{N_{\text{tot}}} = \Delta E \frac{\alpha \times}{E_{\gamma_0}} \left[\ln \frac{E_{\gamma_0}}{E} + \frac{4}{3} \left(\frac{E}{E_{\gamma_0}} - 1 \right) + \frac{8}{3} \left(1 - \frac{E^2}{E_{\gamma_0}^2} \right) \right] \quad (6)$$

ove η = rendimento totale su tutto l'angolo solido;

E_{γ_0} = valore massimo di energia del fascio γ prodotto dalla macchina.

Volendosi in realtà accettare solo le particelle prodotte entro un cono di semiapertura 10^{-2} rad, bisogna tener conto dell'apertura angolare del fascio emergente dal convertitore, lo scattering coulombiano degli elettroni nell'attraversamento del quale è la causa principale dello sparpagliamento del fascio prodotto. Anche approssimando la distribuzione angolare delle particelle emergenti con la formula dello scattering coulombiano, resta aperto il problema della definizione dell'angolo quadratico medio, poichè la conversione avviene in tutta la targhetta e non ad una profondità fissa, per cui bisognerebbe calcolare il valore medio t dello spessore del convertitore attraversato dagli elettroni prodotti. Si nota però che sia η sia $l'x$ che rende massimo η non variano sensibilmente se t varia fra $1/3$ e $2/3$ dello spessore della targhetta. Assumiamo quindi $t = 2/3 x$ e otteniamo

$$\langle \theta^2 \rangle = 15,36 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad (E = 250 \text{ MeV}) \quad (7)$$

mentre il rendimento, in 10^{-2} rad, risulta espresso dalla formula

$$\eta = \alpha \frac{\Delta E}{E_0} x \left[1 - e^{-\frac{0,065}{x}} \right] \left[\ln \frac{E_{\gamma_0}}{E} + \frac{4}{3} \left(\frac{E}{E_0} - 1 \right) + \frac{8}{3} \left(1 - \frac{E^2}{E_0^2} \right) \right] \quad (8)$$

Si vede subito che η , come funzione di x , tende asintoticamente ad un massimo che praticamente raggiunge per $x > 1$. Poichè sono state del resto trascurate le perdite per ionizzazione conviene usare valori di x più piccoli possibile cioè $x = 1$. In queste condizioni, per $E = 250 \text{ MeV}$, $x = 1$ ed $E_{\gamma_0} = 1000 \text{ MeV}$ si ha numericamente

$$\eta = 0,75 \cdot 10^{-4} \Delta E \quad (9)$$

Progetto ottico del canale

Per trasportare il fascio prodotto nel convertitore in AdA, si è pensato di costruire un sistema ad ingrandimento unitario usando 4 lenti quadrupolari: esattamente due che rendano il fascio parallelo e due, disposte simmetricamente rispetto alle prime, che facciano riconvergere il fascio nel punto voluto. L'insieme costituisce quindi un sistema telescopico, quasi insensibile ad una variazione della separazione fra le due coppie di lenti.

Per calcolare le caratteristiche ottiche dei quadrupoli, detta M la matrice che trasforma lo spinore iniziale (quello in corrispondenza della sorgente) nello spinore in uscita dal secondo quadrupolo, si avrà

$$\begin{pmatrix} x_u \\ u \\ x'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{110} & M_{120} \\ M_{210} & M_{220} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \text{ piano orizzontale} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} y_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11v} & M_{12v} \\ M_{21v} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_o \\ y_o u \end{pmatrix} \text{ piano verticale (10)}$$

Volendosi avere in uscita un fascio parallelo in entrambi i piani, bisogna scegliere i diversi parametri del sistema in modo che si abbia, nell'ipotesi di sorgente puntiforme

$$\begin{cases} M_{220} = 0 \\ M_{22v} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Detta S la distanza fra la sorgente e il bordo di entrata del primo quadrupolo, D la separazione fra le due lenti, L_1 ed L_2 le lunghezze magnetiche delle stesse a_{ij} gli elementi della matrice di trasferimento della prima lente, b_{ij} quelli della matrice della seconda lente si ha

$$\begin{aligned} M_{11} &= a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} + D a_{21} b_{11} \\ M_{12} &= S \cdot M_{11} + a_{12} b_{11} + a_{22} b_{12} + D a_{22} b_{11} \\ M_{21} &= a_{11} b_{21} + a_{21} b_{22} + D a_{21} b_{21} \\ M_{22} &= S \cdot M_{21} + a_{12} b_{21} + a_{22} b_{22} + D a_{22} b_{21} \end{aligned} \quad (12)$$

Nel piano divergente-convergente risulta

$$\beta^2 = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \frac{1}{\beta_s}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = \cosh(\beta_1 L_1) & b_{11} &= b_{22} = \cos(\beta_2 L_2) \\ a_{12} &= \frac{1}{\beta_1} \cdot \sinh(\beta_1 L_1) & b_{12} &= \frac{1}{\beta_2} \cdot \sin(\beta_2 L_2) \\ a_{21} &= \beta_1 \cdot \sinh(\beta_1 L_1) & b_{21} &= -\beta_2 \cdot \sin(\beta_2 L_2) \end{aligned} \quad (13)$$

mentre il contrario accade nel piano convergente - divergente cioè le funzioni iperboliche si scambiano con quelle cir

colari.

L'elemento M_{22} dipende da diversi parametri e cioè S , D , L_1 , L_2 , β_1 e β_2 . Per trovare un gruppo di valori che soddisfi contemporaneamente sui due piani la condizione imposta, abbiamo fissato alcuni parametri in base a considerazioni di tipo generale.

Si è così fissato

$$S = 200 \text{ cm}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 1.54 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

$$L_1 = 40 \text{ cm}$$

Tenendo costanti tali parametri e variando i rimanenti, si è trovata la soluzione grafica del sistema (11) che è risultata

$$L_2 = 28.39 \text{ cm}$$

$$D = 50.69 \text{ cm}$$

In tali condizioni, le matrici M sui due piani risultano

$$\text{piano div.-conv.} = \begin{vmatrix} 1.824 & 491 \\ -0.195 \times 10^{-2} & 1.9 \times 10^{-2} \end{vmatrix}$$

$$\text{piano conv.-div.} = \begin{vmatrix} 0.1403 & 138.4 \\ -0.721 \times 10^{-2} & 6 \times 10^{-5} \end{vmatrix}$$

Si può notare che gli elementi (22) non sono nulli: la differenza tra le pendenze in uscita calcolate con le matrici scritte e quella che si avrebbe uguagliando a zero gli elementi (22) può dare un'idea degli errori numerici di calcolo.

Assumendo come piano orizzontale quello div.-conv.,

per $x_0 = y_0 = 0.5$ cm $x'_0 = y'_0 = 10^{-2}$ rad le coordinate in uscita dal primo doppietto risultano

$$x_u = 5.82 \text{ cm} \quad x'_u = -0.786 \times 10^{-3}$$

$$y_u = 1.45 \text{ cm} \quad y'_u = -3.6 \times 10^{-3}$$

Per realizzare il sistema telescopico, porremo un doppietto, simmetrico rispetto al primo, alla distanza $F = 690$ cm dal bordo magnetico di uscita del secondo quadrupolo.

Gli spinori all'ingresso di questo secondo sistema saranno:

$$\begin{cases} x_i = 5.28 \text{ cm} \\ x'_i = -0.786 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{cases} \quad \begin{cases} y_i = -1.03 \text{ cm} \\ y'_i = -3.6 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{cases}$$

La matrice di trasferimento attraverso il secondo doppietto si otterrà dalle (12) ponendo $S = 0$ e sostituendo gli a_{ij} con i b_{ij} e viceversa.

I quadrupoli saranno così disposti nel seguente ordine

per le lunghezze $L_1 - L_2 - L_2 - L_1$

per le convergenze div.-conv.-conv.-div. nel piano orizz.
conv.-div.-div.-conv. " " vert.

Le espressioni numeriche delle matrici che trasferiscono attraverso il secondo doppietto sono

$$\begin{vmatrix} 0.41 & 126.2 \\ -0.195 \times 10^{-2} & 1.824 \end{vmatrix} \quad \text{nel piano orizzontale}$$

$$\begin{vmatrix} 1.44 & 110 \\ -0.721 \times 10^{-2} & 0.14 \end{vmatrix} \quad \text{nel piano verticale}$$

Gli spinori all'uscita dell'ultima lente sono

$$\begin{cases} x_f = 2.07 \text{ cm} \\ x'_f = -1.17 \times 10^{-2} \text{ rad} \end{cases} \quad \begin{cases} y_f = -1.88 \text{ cm} \\ y'_f = 6.9 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{cases}$$

Per vedere a quale distanza dal bordo di uscita del quarto quadrupolo cade il cross-over del sistema abbiamo di segnato le traiettorie estreme sui due piani come riportato in fig. 1. La zona di minima confusione del fascio si trova quindi ad una distanza ~ 215 cm dal bordo magnetico del quarto quadrupolo.

Caratteristiche elettromagnetiche delle lenti

Per tener conto degli effetti di bordo che migliorano la lunghezza meccanica di un quadrupolo di

$$\Delta L \sim 0.88 a \quad (13)$$

(ove a = raggio del cerchio di gola) abbiamo assunto

$$L_1 = 33 \text{ cm} \quad \text{ed} \quad L_2 = 22 \text{ cm}$$

Questo dipende dal fatto che la massima dimensione del fascio è risultata di circa 6 cm e quindi, prevedendo l'uso di un sistema di vuoto, necessario per abbassare le perdite dovute allo scattering in aria, abbiamo assunto $a = 8$ cm. Abbiamo inoltre ricavato il profilo della scarpa polare da un cerchio di raggio $R = 1.15 a$ e la lunghezza dell'arco di tale cerchio rappresentante il profilo della scarpa è stato delimitato da due perpendicolari agli assi x e y (v. fig. 2) con piede a distanza $2 \frac{a}{\sqrt{2}}$ dal centro.

Dall'esperienza acquisita in misure su lenti analoghe abbiamo assunto per la funzione $B_x(y)$ l'andamento rappresentato in fig. 2 in modo tale che il flusso totale entrante alla base del polo risulta

$$\phi_{\text{polo}} = 4 a^2 L \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (14)$$

Per il circuito del ferro si sono usati pezzi ottenuti di fusione e si sono scelti i parametri geometrici dello stesso in modo tale che esso lavori ad una induzione in-

inferiore a 1Wb/mq quando il gradiente risulta di 300 Gs/cm.
Le bobine sono state costruite con quadrello di rame 8 x 8 mmq con buco interno 5 x 5 mmq, addossando ad ogni polo 51 spire.

Detto G il valore del gradiente di campo, valendo la relazione

$$(NI)_{\text{polo}} = \frac{a^2}{2\mu_0} G \quad (15)$$

e tenendo conto del valore del flusso che carica la base del polo, abbiamo tracciato la curva di eccitazione delle quattro lenti (v. fig. 3).

Da tale curva si vede come il gradiente massimo ottenibile sia di circa 600 Gs/cm: per tale valore di G si ha I = 400 Amperes e quindi la caduta di tensione su ciascuna lente risulta di circa 40 Volt con una potenza dissipata di 16 kW per lente ed una caduta di pressione nel circuito di raffreddamento di ~ 12 atmosfere per ciascuna lente per una sovratemperatura di 30°C: tale caduta si può ripartire in 4 circuiti di raffreddamento, uno per ogni bobina. La portata d'acqua necessaria è dell'ordine di 3/100 litro al secondo.

Calcolo delle aberrazioni

a) Aberrazione di apertura

Considerando le equazioni delle traiettorie al 3° ordine (1) indicando con $x(s)$ e $y(s)$, $x'(s)$ e $y'(s)$ le coordinate e le derivate corrispondenti alla traiettoria determinata al primo ordine, supponiamo di poter esprimere le coordinate della traiettoria reale come

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= x(s) + \xi(s) \\ \bar{y}(s) &= y(s) + \eta(s) \end{aligned} \quad (16)$$

Se sostituiamo nelle equazioni delle traiettorie al 3° ordine otteniamo due relazioni che legano i termini "perturbativi" $\xi(s)$ ed $\eta(s)$ alle grandezze $x(s)$ e $y(s)$.

Supponendo il piano x s convergente, indicando con G_0 il gradiente al centro del quadrupolo e con k il fattore di forma $G(s)/G_0$, otteniamo, trascurando le derivate seconde di k , le relazioni

$$\begin{aligned} \xi'' + \beta^2 k \xi &= -\beta^2 \left[k \frac{(3x'^2 + y'^2)x}{2} - k x' y' y - k' x y y' \right] \\ \eta'' - \beta^2 k \eta &= +\beta^2 \left[k \frac{(3y'^2 + x'^2)y}{2} - k x' y' x - k' x y x' \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Trascurando i termini quadratici in x' e y' , si giunge alle equazioni (18), assumendo un andamento rettangolare per la funzione $k(s)$ ("modello rettangolare")

$$\begin{aligned} \xi'' + \beta^2 \xi &= +\beta^2 x y y' \cdot k' \\ \eta'' - \beta^2 \eta &= -\beta^2 x y x' \cdot k' \end{aligned} \quad (18)$$

Nella ipotesi precedente, il termine in k' si presenta sotto forma di una funzione di Dirac, positiva alla entrata e negativa all'uscita della lente.

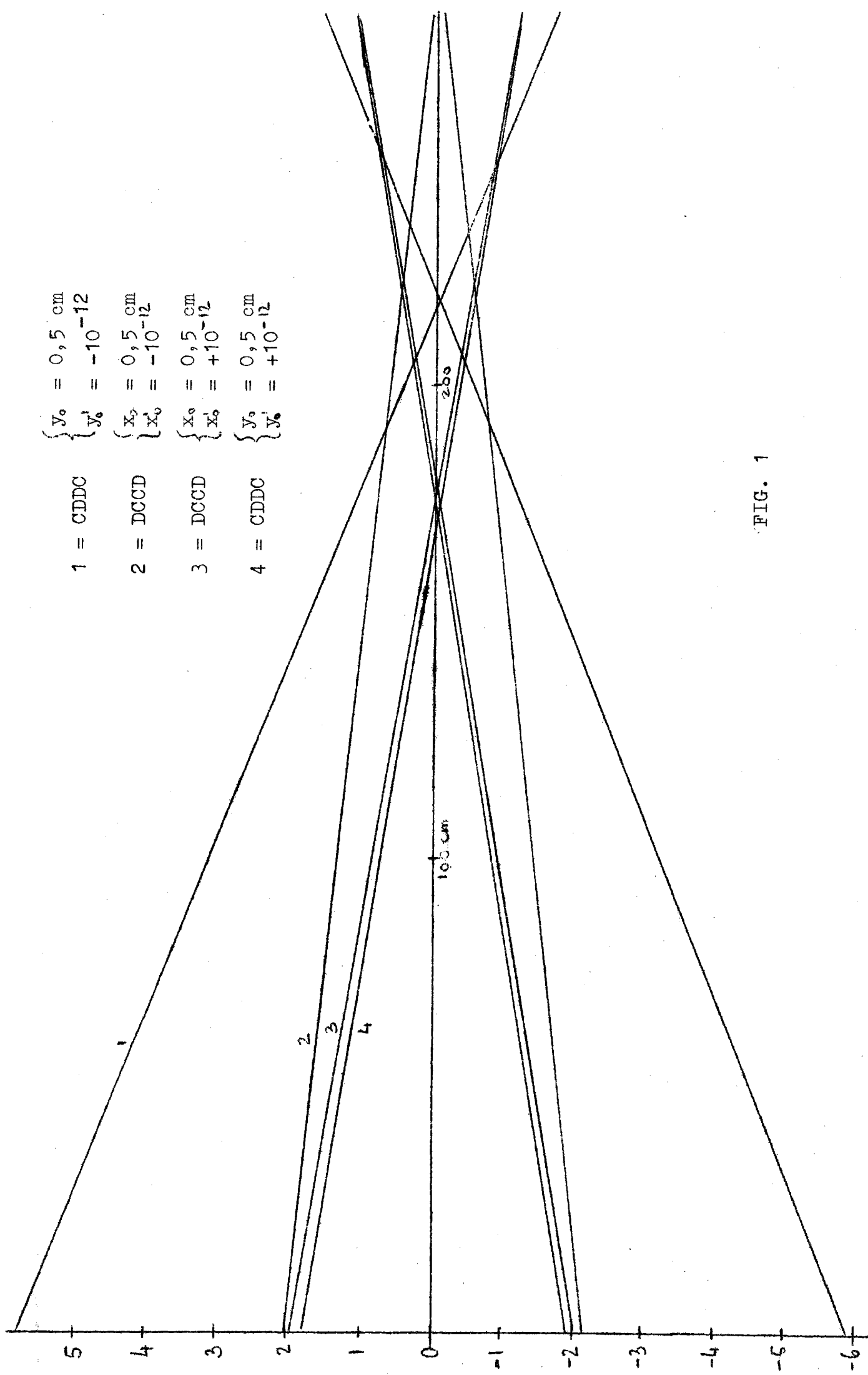
Seguendo le particelle del fascio nel loro percorso, abbiamo quindi programmato le equazioni (18) per ogni lente del sistema, partendo dall'ipotesi di sorgente estesa di forma circolare: con tale programma (scritto in FORTRAN), sfruttando il tracing del quale è possibile seguire la traiettoria di una particella generica di rigidità magnetica generica punto per punto, abbiamo ottenuto la forma dei due segmenti focali e la forma della sezione trasversale del fascio in corrispondenza del cross-over (vedi fig. 4).

b) Aberrazione di cromaticità

Sfruttando il programma precedente abbiamo calcolato gli spostamenti del cross-over del fascio al variare della rigidità magnetica della particella. Come è noto dalla teoria, le lenti quadrupolari sono scarsamente selettive nei confronti del momento delle particelle, ma tale capacità di selezionare, anche se solamente in direzione dell'asse ottico, i diversi momenti presenti nel fascio aumenta, in termini percentuali, linearmente all'aumentare del numero delle lenti. Dicendo s_0 la distanza del cross-over, in corrispondenza al momento nominale, dal bordo magnetico di uscita della quarta lente, abbiamo riportato in un diagramma la grandezza $\frac{\Delta s}{s_0} \%$ in funzione della grandezza $\frac{\Delta p}{p_0} \%$. Dal diagramma (v. fig. 5) si nota quindi che vale con ottima approssimazione la legge $\frac{\Delta s}{s_0} = 4 \frac{\Delta p}{p_0}$ ovvero $\frac{\Delta s}{s_0} = n \frac{\Delta p}{p_0}$ ove n è il numero delle lenti quadrupolari costituenti il sistema.

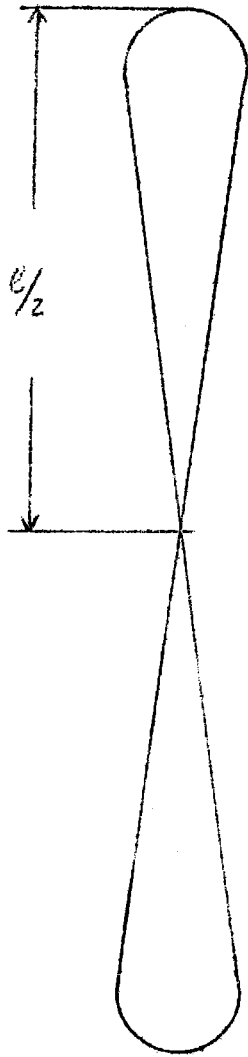
Bibliografia

- (1) - Grivet, Septier; Les lentilles quadrupolaires magnetiques - CERN 58-25.
- (2) - S. Penner; Calculations of properties of magnetic deflection systems - Rev. Sci. Instr. 32, 150 (1961).



- 1 = CDDC $\begin{cases} y_0 = 0,5 \text{ cm} \\ y'_0 = -10^{-12} \end{cases}$
- 2 = DCCD $\begin{cases} x_0 = 0,5 \text{ cm} \\ x'_0 = -10^{-12} \end{cases}$
- 3 = DCCD $\begin{cases} x_0 = 0,5 \text{ cm} \\ x'_0 = +10^{-12} \end{cases}$
- 4 = CDDC $\begin{cases} y_0 = 0,5 \text{ cm} \\ y'_0 = +10^{-12} \end{cases}$

FIG. 1



Segmento focale orizzontale

$$\frac{e}{2} = x_f - x_f \frac{y_f}{y_f} = 1.75 \text{ cm}$$

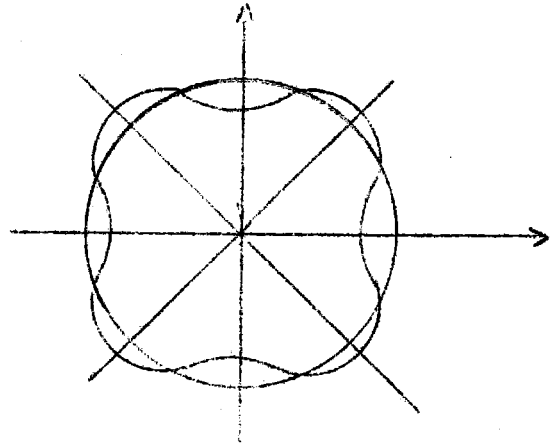
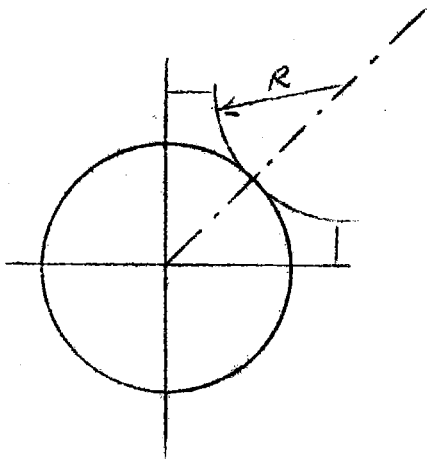


FIG. 4



$a = 8 \text{ cm}$
 $R = 1,15 a$

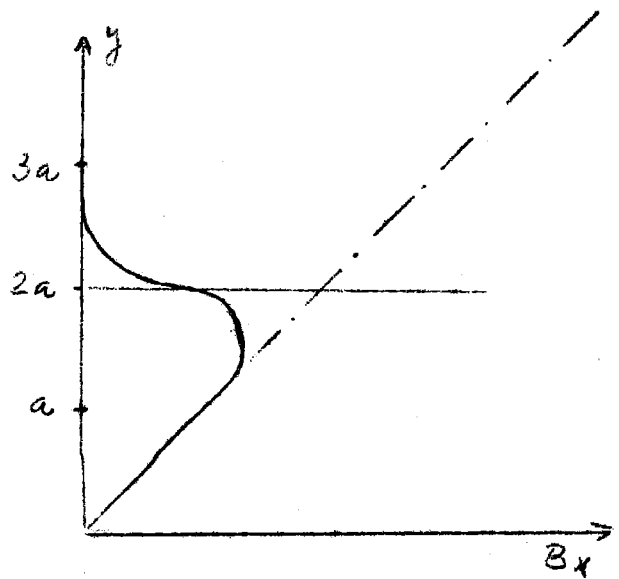


FIG. 2

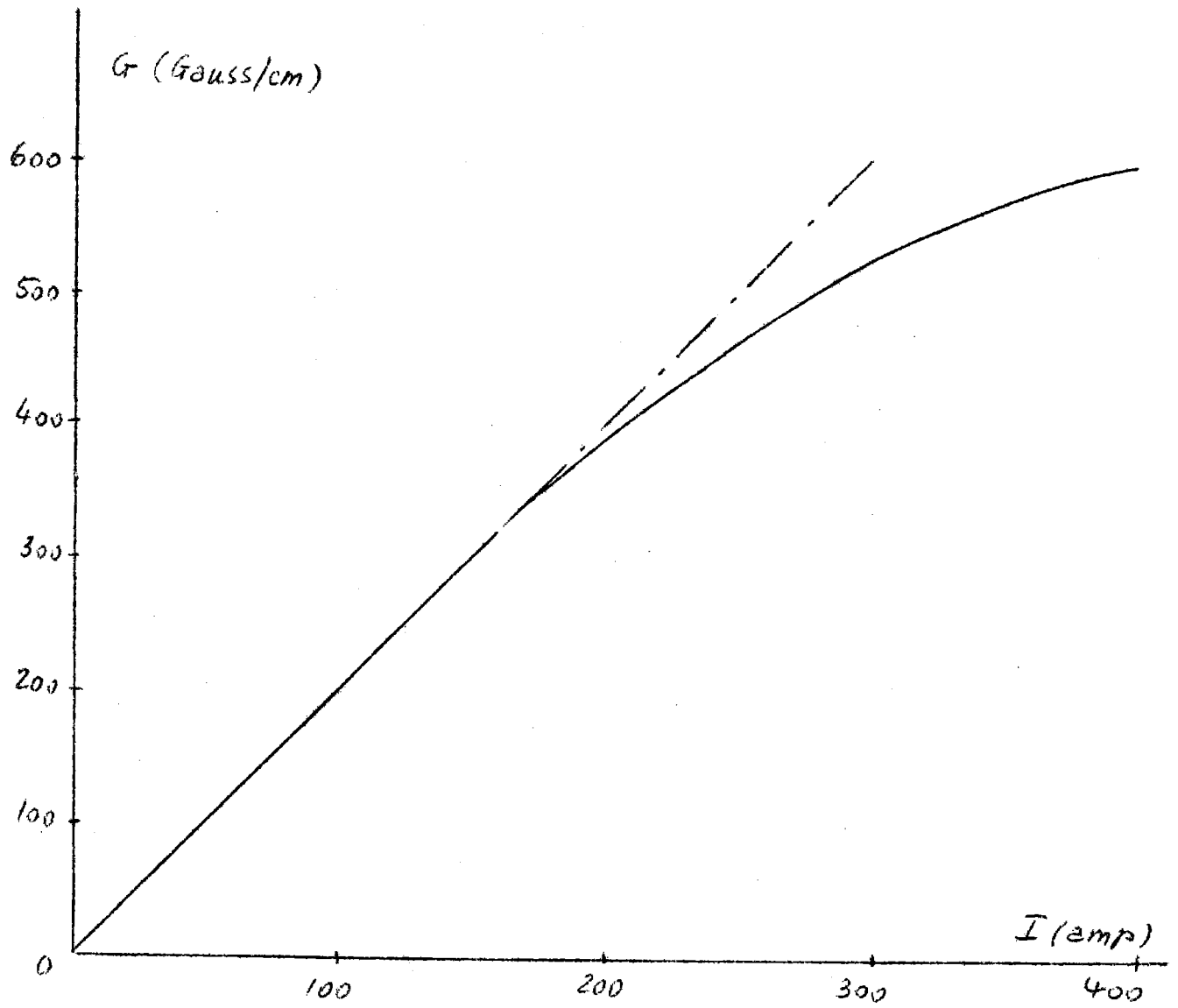
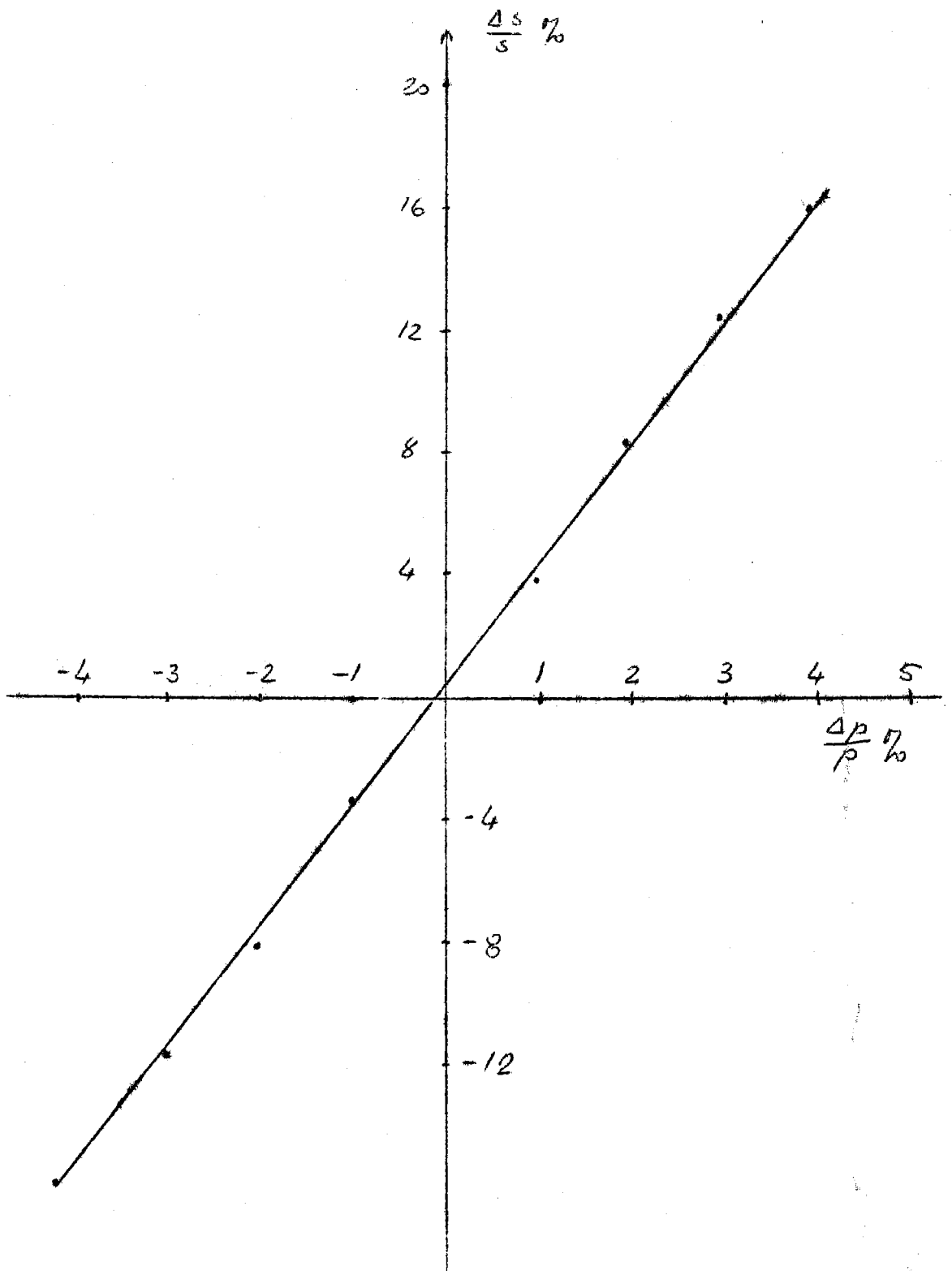


FIG. 3



$\frac{\Delta s}{s}$ = spostamento percentuale del cross-over del fascio
 $\frac{\Delta p}{p}$ = variazione % dell'impulso della particella generica

FIG. 5